

Fra jævn bevægelse til meteorkraterer

I dette forløb beskrives en række simuleringer og modeller omkring en genstands bevægelse under forskellige omstændigheder:

- Uden kraftpåvirkning
- Under påvirkning af en konstant kraft
- Under påvirkning af en varierende kraft

Der kan fx være tale om en stålkugle i frit fald, en tennisbold, der bremses af luftmodstand, eller en meteor, der bevæger sig gennem Jordens atmosfære.

Vi starter med den simpleste model og tager derefter hensyn til flere og flere aspekter, der påvirker en genstands bevægelse. Simuleringerne foretages ved hjælp af numerisk integration baseret på Eulers metode.

Jævn bevægelse

En genstand, der ikke påvirkes af nogen kraft eller af kræfter, der tilsammen udligner hinanden, vil ifølge Newtons 2. lov have en acceleration $a = 0$. Det betyder, at genstanden bevæger sig med konstant fart v , og genstanden vil i lige store tidsrum Δt tilbagelægge lige lange afstande Δs . Med symboler får vi derfor, at

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow v \text{ konstant}$$

og

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v \cdot \Delta t$$

I FPro3 defineres startbetingelserne i KLAR PROGRAM fx ved:

```
s := 0, v := 5, t := 0 og Δt = 0,05
```

og en model for den jævne bevægelse kan i LØKKE PROGRAM beskrives ved:

```
s := s + v · Δt
t := t + Δt
if t > 0 then stop
```

- Indtast startbetingelser og model i FPro3 og kørs simuleringen ved at afbilde vejstrækningen som funktion af tiden. Varier begyndelsesbetingelserne og undersøg, hvad det betyder for simuleringen.

Bevægelse med konstant acceleration

For en genstand, der accelererer konstant, gælder der, at

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t$$

og en model for denne type bevægelse kan derfor beskrives ved en lille tilføjelse til modellen for den jævne bevægelse, hvor accelerationen var 0:

```
s := s + v · Δt
v := v + a · Δt
t := t + Δt
if t > 0 then stop
```

I Klar program skal der tilføjes en startværdi for accelerationen, fx $a := 3,2$.

- Indtast startbetingelser og model i FPro3 og kørs simuleringen ved at afbilde vejstrækningen som funktion af tiden. Varier begyndelsesbetingelserne og undersøg, hvad det betyder for simuleringen.
- Foretag også en afbildning af farten som funktion af tiden.

Frit fald i tyngdefeltet

- Brug modellen med konstant acceleration ovenfor og sæt accelerationen til $a = -9,82$. Simuler et frit fald for en stålkugle fra en højde på $h = 50$ m og en begyndelsesfart på $v = 8$ m/s.
- Det ses, at kuglen befinder sig mindre end 10 m over overfladen i tidsrummet mellem 3,5 s og 4,5 s. Zoom ind på dette område i koordinatsystemet. Undersøg betydningen af skridtlængdens betydning ved at finde den simulerede højde til tiden $t = 4,1$ s ved simuleringer med

$\Delta t =$ hhv. 0,1 s, 0,05 s, 0,025 s og 0,01 s

Sammenlign de fundne værdier med den korrekte værdi på $s = 0,26$ m, der kan bestemmes analytisk.

Hvad betyder det med hensyn til det bedste valg af skridtlængden?

Bevægelse i væske – Stokes lov

En kugle, der befinder sig i en væske, vil være påvirket af tyngdekraften og en opdrift. Såfremt kuglen bevæger sig, vil den tillige være påvirket af en gnidningskraft, der er modsatrettet bevægelsen.

Gnidningskraften F_g er givet ved Stokes lov:

$$F_g = 6 \pi \cdot \mu \cdot r \cdot v$$

hvor μ er væskens dynamiske viskositet, r er kuglens radius, og v er kuglens fart.

Den samlede kraftpåvirkning på kuglen er derfor

$$F = m \cdot g - \rho_v \cdot V \cdot g - 6 \pi \cdot \mu \cdot r \cdot v \Rightarrow$$

$$a = \frac{F}{m} = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_k}\right) \cdot g - \frac{9 \mu}{2 \rho_k \cdot r^2} \cdot v \Rightarrow$$

$$a = a_0 - K \cdot v$$

hvor ρ_v er væskens densitet og ρ_k er kuglens densitet. Der er i omskrivningerne benyttet, at

$$m = \rho_k \cdot V = \rho_k \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

Som eksempel kigger vi på en stålkugle med radius $r = 2,0 \text{ mm}$ og densitet $\rho_k = 7,8 \text{ g/cm}^3$. Stålkuglen befinder sig i olivenolie, der har densiteten $\rho_v = 0,88 \text{ g/cm}^3$ og viskositeten $\mu = 0,081 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

- Indtast startbetingelser og model i FPro3 og kørsimuleringen. Foretag en afbildning af de tre SVAT-diagrammer (t, s), (t, v) og (t, a) for passende valg af akseværdier. Kommenter grafernes udseende.
- Hvilken fart har kuglen til tiden $t = 0$?
- Hvor langt er kuglen faldet i det første sekund?
- Sæt $\mu = 0$ og find igen farten til $t = 0$ samt faldlængden i det første sekund. Hvilken form for fald svarer det til?
- Glycerol har densiteten $1,26 \text{ g/cm}^3$ og viskositeten $1,41 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Hvor lang tid går der inden en kugle med en radius 5 mm opnår en konstant fart, og hvor stor bliver farten? HINT: Tænk på, at skridtlængden skal være rimelig i forhold til den tid, der spørges om.

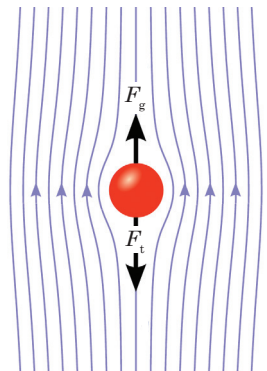
Bevægelse med luftmodstand

Det er umuligt at opstille en entydig matematisk model for luftmodstanden på grund af luftens kaotiske natur. I specielle tilfælde kan man dog opstille brugbare matematiske modeller. Eksempler på sådanne modeller inkluderer modellerne for fald med luftmodstand.

Partikler og små hastigheder

I en af modellerne for fald med luftmodstand formodes det, at den kraft F_g , luften påvirker det faldende legeme med, er proportional med legemets hastighed, altså igen Stokes lov:

$$F_g = 6 \pi \cdot \mu \cdot r \cdot v$$



Større hastigheder

For større objekter ved større hastigheder antages det, at sammenhængen mellem friktionskraften F_g og farten v er kvadratisk:

$$F_g = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

A er legemets tværsnitsareal, ρ er luftens densitet og luftmodstandskoefficienten c_w er en formfaktor, der afhænger af legemets geometri.

Form	Målte formfaktorer
Kugle	0,47
Halvkugle	0,42
Kegle	0,50
Kubus	1,05
Vinklet kubus	0,80
Lang cylinder	0,82
Kort cylinder	1,15
Strømlinet legeme	0,04
Strømlinet halvt legeme	0,09

Luften er så tynd, at vi ser bort fra opdriften. Som tidligere finder vi bevægelsens acceleration:

$$F = m \cdot a = m \cdot g - \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \Rightarrow$$

$$a = g - \frac{c_w \cdot \rho \cdot A}{2 \cdot m} \cdot v^2 = g - K \cdot v^2$$

Nedenfor er der beskrevet en simulering af en bordtennisbolds fald fra højden $h = 10$ m. Boldens masse er $m = 2,0$ g og den har en diameter på $d = 40$ mm. Programmeringen er foretaget ved at formulere et

KLAR PROGRAM:

```
h := 10      // Valgfri starthøjde i m
v := 0      // Valgfri begyndelsesfart i m/s
g := -9.82  // Tyngdeaccelerationen i m/s²
m := .002   // Boldens masse i kg
dl := 1.29  // Luftens densitet kg/m³
cw := 0.47  // Boldens formfaktor
r := .02    // Boldens radius i m
A := 4·pi·r² // Beregning af tværsnitsareal
K := cw·dl·A/(2·m) // Beregning af konstanten
a := g - sign(v)·K·v² // Accelerationens startværdi
t := 0      // Valgfri starttidspunkt i s
Δt := 0.01  // Valgfri skridtlængde i s
```

og et LØKKE PROGRAM:

```
h := h + v·Δt
v := v + a·Δt
a := g - sign(v)·K·v²
t := t + Δt
if t > 5 then stop
```

Brugen af $\text{sign}(v)$ i udtrykket $a := g - \text{sign}(v) \cdot K \cdot v^2$ sikrer, at accelerationen (og dermed kraften) er modsatrettet bevægelsen.

- Indtast startbetingelser og model i FPro3 – eller hent den færdige model [Luftmodstand.fpr](#) – og kørsimuleringen. Foretag en afbildning af de tre SVAT-diagrammer (t, h), (t, v) og (t, a) for passende valg af akseværdier. Kommenter grafernes udseende.

- Hvilken ændring skal der foretages for at ændre simuleringen til et fald af en stålkugle med samme størrelse. Kørsimuleringen og kommenter.

En meteors opbremsning i Jordens atmosfære

Det er nu målet at følge en meteorit ned gennem Jordens atmosfære. I forhold til en bordtennisbolds bevægelse gennem luft er der her tale om to andre faktorer, der spiller ind. For det første er tyngdeaccelerationen 6 % mindre i højden 200 km end ved Jordens overflade. Da en meteor udsættes for ekstremt store accelerationer under nedbremsningen kan vi dog se bort fra den lille ændring i tyngdeaccelerationen.

Et andet forhold, der gør sig gældende, er, at atmosfæren bliver tyndere med højden. Vi antager, at luftens densitet aftager eksponentielt med højden, og at halveringshøjden er 5.000 m. Det giver en variation i luftens densitet på

$$dl(h) = 1,29 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{h/5000}$$

Programmeringen kan foretages med et KLAR PROGRAM:

```
h := 200000 // Valgfri starthøjde i m
v := -20000 // Valgfri begyndelsesfart i m/s
g := -9,82  // Tyngdeaccelerationen i m/s²
m := 20     // Meteorens masse i kg
cw := 1,05  // Meteorens formfaktor – kubisk
dm := 7800  // Meteorens densitet i kg/m³
dl := 1,29·0,5h/5000 // Luftens densitet i kg/m³
A := (m/dm)2/3 // Meteorens tværsnitsareal beregnes
a := g - sign(v)·(cw·dl·A/(2·m))·v² // Accelerationens startværdi
t := 0      // Valgfri starttidspunkt i s
Δt := 0.01  // Valgfri skridtlængde i s
```

og et LØKKE PROGRAM:

```
h := h + v·Δt
v := v + a·Δt
dl := 1,29·0,5h/5000
a := g - sign(v)·(cw·dl·A/(2·m))·v²
t := t + Δt
if t > 100 then stop
```

På figurerne ses de tre SVAT-diagrammer med hhv. højde, fart og acceleration som funktion af tiden. Den nederste figur viser accelerationens afhængighed af højden. Det ses, at der opstår en meget stor acceleration ca. 9,4 s efter simulationens start, og det sker i en højde på ca. 16 km.

- Indtast startbetingelser og model i FPro3 – eller hent den færdige model [Meteornedfald.fpr](#) – og kørsimuleringen. Foretag en afbildning af de tre SVAT-diagrammer (t, h), (t, v) og (t, a) for passende valg af akseværdier. Kommenter grafernes udseende.
-
- Lav en simulering, hvor meteorens fart sættes til 30 km/s. Bestem tidspunktet for den største acceleration. Hvor stor er denne acceleration og i hvilken højde sker det?
-
- Undersøg massens betydning for tidspunkt og højde for den største acceleration.

Opbremsning ved skrå indfald

